LA DEMANDE :

ANALYSE MICROÉCONOMIQUE APPLIQUÉE

Christian BIALÈS
Professeur honoraire de Chaire Supérieure
en Économie et Gestion
www.christian-biales.net

La demande est un thème majeur de l'analyse microéconomique traditionnelle et constitue à ce titre un moment important du programme d'économie générale des classes préparatoires "tertiaires" : les classes préparatoires économiques et commerciales, option technologique, et les classes préparatoires "ENS-Cachan". L'article ci-dessous propose une présentation pédagogique de la théorie de la demande, illustrée par un exemple.

En analyse microéconomique, la demande individuelle d'un bien est une fonction dépendant de plusieurs variables, en particulier le prix du bien et le revenu du consommateur.
L'analyse de la demande en fonction du prix donne traditionnellement lieu d'abord à la définition de la fonction de demande par rapport au prix et à l'explication de celle-ci au travers de la décomposition de l'effet-prix (première partie), puis à la détermination de deux types d'indicateurs, essentiels en économie : des élasticités et des indices (deuxième partie).
Notre présentation de ces notions importantes s'appuie sur une application très simple.

DONNÉES DE L'APPLICATION :

- Soit un consommateur et deux biens X et Y.
- Fonction d'utilité du consommateur : $U = x + y + xy$, avec x la quantité du bien X et y la quantité du bien Y => courbes d'indifférence d'équation : $y = (U - x) / (1 + x)$.
- Revenu du consommateur : $R = 1000$
- Vecteur de prix pour la période de base (0) : $P_i^{(0)} = (12 ; 6)$ pour i = X et Y
- Vecteur de prix pour la période courante (n) :

  Situation 1 : $P_i^{(n)} = (8 ; 6)$ pour i = X et Y.

  Situation 2 : $P_i^{(n)} = (8 ; 10)$ pour i = X et Y.

PREMIÈRE PARTIE : L'ANALYSE DE LA DEMANDE

§1) La fonction de demande.

A- La définition de la fonction de demande

La théorie microéconomique traditionnelle définit la fonction de demande comme étant la relation entre la quantité optimale demandée d'un bien et les valeurs possibles des variables qui la déterminent.
Cette définition appelle plusieurs commentaires :

- La relation que la fonction établit concerne la quantité *optimale* demandée du bien considéré en ce sens qu'elle vise le meilleur choix de consommation que le consommateur peut faire de ce bien en tenant compte non seulement de ses préférences mais aussi de la contrainte budgétaire que le prix des biens et que son revenu limité lui imposent.
- La fonction de demande est une fonction à plusieurs variables parce que le choix de consommation dépend de plusieurs variables : le prix du bien considéré, le prix des autres biens, le revenu du consommateur, ses goûts et préférences, sa richesse, etc.
- L'analyse microéconomique élémentaire de la fonction de demande privilégie les trois premières variables : le prix du bien, le prix des autres biens et le revenu du consommateur. Cela revient à considérer les autres variables comme constantes, et par conséquent à raisonner "ceteris paribus", c'est-à-dire toutes choses égales par ailleurs : en particulier, les goûts et préférences du consommateur tels que les décrit sa fonction d'utilité sont considérés comme stables.

Remarque : La notion de demande doit être distinguée de celle de consommation. Alors que la première est une notion ex ante (en termes de projets), la seconde est une notion ex post (en termes de réalisations) : la fonction de demande indique par exemple quelle serait la demande optimale du consommateur pour tel bien si le prix de celui-ci, affiché par le marché, était de tel ou tel montant ; la fonction de consommation montre comment a évolué la consommation effectivement constatée de tel bien en fonction par exemple des différentes valeurs que le prix a pu prendre.

B- La détermination de la fonction de demande

La demande optimale de X, comme celle de Y, se détermine à partir des meilleurs choix de consommation dictés au consommateur par la maximisation de son utilité -sa satisfaction- sous la contrainte du budget dont il dispose et des prix des deux biens ; autrement dit, à partir des différents équilibres du consommateur selon les valeurs prises par son budget et par les prix des biens qui doivent composer son panier.

L'équilibre du consommateur se définit de la manière générale suivante :

$$\text{Max } U = U(x, y)$$
$$\text{sous } R = P_X * x + P_Y * y$$

Remarques :

1- Nous ne détaillons pas ici les hypothèses posées par la microéconomie traditionnelle pour le calcul économique du consommateur (rationalité absolue du consommateur, fonction d'utilité continue, dérivable et

définie à une transformation monotone croissante près, convexité des préférences, non-saturation des besoins, agent preneur de prix, analyse statique, ...).
Précisons seulement que l'expression de la contrainte budgétaire (égalité du revenu et de la somme dépensée en biens X et Y) signifie que le consommateur est supposé consommer la totalité de son revenu.
La représentation graphique de la contrainte budgétaire dans le repère d'axes (x ; y) est une droite, dite droite de budget ou droite d'isocoût puisque tous les paniers des deux biens dont elle est le lieu géométrique ont un coût identique, égal au revenu du consommateur. Cette droite a pour équation :

$$y = - (P_X / P_Y) * x + R / P_Y$$

Graphiquement parlant, comme le revenu est pleinement consommé, le panier optimal correspond nécessairement à l'un des points de la droite de budget (au-delà de la droite, les paniers ne peuvent être achetés faute d'un revenu suffisant, et en-deçà de la droite, le revenu du consommateur n'est pas pleinement utilisé).

2- On parle d'*équilibre* du consommateur parce qu'il s'agit de la situation que celui-ci recherche et qu'il n'a plus intérêt à modifier une fois qu'il l'a trouvée ; cette situation est, rationalité oblige, celle qui lui procure le maximum de satisfaction, compte tenu de sa contrainte budgétaire.

1) La résolution mathématique du problème d'optimisation.

Mathématiquement, le problème de la détermination du meilleur choix pour le consommateur, du meilleur panier pour lui, est un problème d'optimisation sous contrainte, autrement dit celui de la détermination d'un "extremum lié". Ce problème peut être résolu par la méthode dite de substitution mais on lui préfère en général la méthode dite de Lagrange.

La méthode de Lagrange (ou méthode du lagrangien ou encore méthode du multiplicateur de Lagrange, multiplicateur noté λ) consiste à former à partir de la fonction objectif $f(x,y)$ et de la contrainte $g(x,y)$ -qui doit être du type $g(x,y) = 0$- la fonction $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y)$.

Les conditions d'optimalité sont de deux ordres :
- D'abord, les conditions de premier ordre, qui sont les conditions nécessaires : les dérivées partielles premières de la fonction L doivent être nulles :

$$\delta L / \delta x = 0 \qquad \delta L / \delta y = 0 \qquad \delta L / \delta\lambda = 0$$

- Ensuite, les conditions de second ordre, qui sont les conditions suffisantes : le déterminant de la matrice hessienne bordée de la fonction f doit être positif pour qu'il s'agisse d'un maximum (il doit être négatif en cas de minimisation). Ce déterminant est appelé "hessien bordé".

Précisons que la matrice hessienne bordée, notée H, est la matrice des dérivées partielles secondes de la fonction f ; c'est une matrice symétrique.

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \delta^2 L / \delta x\delta x & \delta^2 L / \delta x\delta y & \delta^2 L / \delta x\delta\lambda \\ \delta^2 L / \delta y\delta x & \delta^2 L / \delta y\delta y & \delta^2 L / \delta y\delta\lambda \\ \delta^2 L / \delta\lambda\delta x & \delta^2 L / \delta\lambda\delta y & \delta^2 L / \delta\lambda\delta\lambda \end{vmatrix}$$

Dans notre exemple, le lagrangien s'écrit :

$$L = x + y + xy + \lambda\,(R - P_X\, x - P_Y\, y)$$

Les conditions de premier ordre s'écrivent :

$$dL / dx = 1 + y - \lambda\, P_X = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$dL / dy = 1 + x - \lambda P_Y = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$dL / d\lambda = R - P_X\, x - P_Y\, y = 0 \qquad \text{(III)}$$

1ère résolution : on divise les deux premières dérivées partielles l'une par l'autre.

$$\text{(I) / (II)} \Rightarrow (1+y) / (1+x) = \lambda P_X / \lambda P_Y = P_X / P_Y$$

2ème résolution : on tire λ des deux premières dérivées partielles.

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I)} \Rightarrow 1+y = \lambda P_X \Rightarrow \lambda = (1+y) / P_X \\ \\ \text{(II)} \Rightarrow 1+x = \lambda P_Y \Rightarrow \lambda = (1+x) / P_Y \end{array}\right\} \Rightarrow (1+y) / P_X = (1+x) / P_Y$$

Les conditions de second ordre s'écrivent par l'intermédiaire de la matrice hessienne bordée H :

$$H(x,y,\lambda) = \begin{vmatrix} \delta^2 L / \delta x \delta x = \delta^2 L / \delta x^2 = 0 & \delta^2 L / \delta x \delta y = 1 & \delta^2 L / \delta x \delta \lambda = - P_X \\ \delta^2 L / \delta y \delta x = 1 & \delta^2 L / \delta y \delta y = \delta^2 L / \delta y^2 = 0 & \delta^2 L / \delta y \delta \lambda = - P_Y \\ \delta^2 L / \delta \lambda \delta x = - P_X & \delta^2 L / \delta \lambda \delta y = - P_Y & \delta^2 L / \delta \lambda \delta \lambda = \delta^2 L / \delta \lambda^2 = 0 \end{vmatrix}$$

Dét H = $- P_X [(-P_Y) + 0] + P_Y [0 + P_X] = P_X * P_Y + P_X * P_Y = 2 P_X P_Y$

Comme les prix de X et de Y sont positifs, Dét H est lui-même toujours positif : la solution trouvée à l'issue des conditions de premier ordre correspond donc bien à un maximum.

Remarques sur la fonction d'utilité.

1- La fonction d'utilité considérée ici pourrait être appelée "fonction d'utilité ordinaliste parétienne" : d'abord pour mettre l'accent sur le fait qu'elle se fonde sur la conception ordinaliste et non cardinaliste de l'utilité, conception que Pareto a développée, et ensuite pour la distinguer de la "fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern" mise en œuvre quand il s'agit d'étudier le comportement de l'individu en situation d'incertitude.

2- La fonction d'utilité traduit en général les différentes hypothèses retenues pour la relation de préférence :

- *Monotonie ou non-saturation* : le consommateur préfère avoir plus que moins => les courbes d'indifférence sont décroissantes et plus on va en direction du nord-est de la carte d'indifférence plus on atteint des niveaux d'utilité élevés.

- *Convexité* : le consommateur préfère les mélanges => un point situé sur la corde joignant deux points appartenant à une même courbe d'indifférence traduit un "mélange" de ces deux paniers qui ont même utilité et correspond à un niveau d'utilité supérieur. (Attention : une fonction d'utilité qui traduit une convexité des préférences -et qui est donc représentée par des courbes d'indifférence convexes- est dite quasi-concave).

- *Désirabilité* : chaque bien visé par la fonction d'utilité est désirable en ce sens que le consommateur préfère tout panier en comportant au moins une certaine quantité -même infinitésimale- à tout panier qui n'en comporterait aucune => les courbes d'indifférence sont asymptotes à chacun des deux axes.

◊ À ces propriétés d'ordre économique, on ajoute aux fonctions d'utilité la propriété de *continuité* pour permettre l'application du calcul différentiel.

◊ Lorsqu'une relation de préférence présente toutes ces conditions, les courbes d'indifférence sont de type hyperbolique.

C'est le cas usuel et en particulier celui des fonctions d'utilité de type Cobb-Douglas ($U = x^{\alpha} * y^{\beta}$ avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$; dans ce cas, TMS = $\alpha y / \beta x$). La fonction est une fonction à proprement parler de « Cobb-Douglas » quand la somme des exposants est égale à 1.
Et comme la fonction d'utilité est définie à une transformation monotone croissante près, ce qui en constitue une propriété supplémentaire importante, on peut substituer à une fonction d'utilité, par exemple du type $U = \ln x + \ln y$ la fonction $U = x.y$ pour exprimer plus facilement les fonction de demande des deux biens.

◊ Il peut exister d'autres cas où les hypothèses posées précédemment ne sont pas toutes vérifiées. En particulier, la convexité peut être vérifiée sans que pour autant la désirabilité ne le soit. Les courbes sont alors bien convexes mais elles ne sont pas asymptotes aux axes.
Il en est ainsi dans deux cas remarquables, correspondant tous deux à des fonctions dites "additivement séparables" :

- Les fonctions linéaires de la forme $U = ax + by$ avec $a > 0$ et $b > 0$; dans ce cas, TMS = a / b.

- Les fonctions quasi linéaires de la forme $U = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ avec α et β compris entre 0 et 1 et a et b strictement positifs ; dans ce cas, TMS = $\alpha a x^{\alpha-1} / \beta b y^{\beta-1}$.

Dans ces deux cas, nécessairement dans le premier, éventuellement seulement dans le second, on peut avoir affaire à une "solution en coin" en ce sens que l'optimum correspond à un point où l'une des courbes d'indifférence coupe l'un des axes.
Mais le plus important à considérer ici est qu'en toute rigueur la résolution par le lagrangien "simple" utilisée plus haut ne convient pas à ces cas particuliers. Il faut lui substituer une méthode de résolution plus générale, celle dite de Kühn et Tücker.
Cette méthode étend la méthode du multiplicateur de Lagrange aux situations où l'optimisation doit tenir compte de plusieurs contraintes prenant la forme d'inégalités : elle associe à chacune d'elles un multiplicateur λ. Lorsque la fonction d'utilité est "additivement séparable", il y a non seulement le multiplicateur λ attaché à la contrainte budgétaire comme dans le lagrangien traditionnel mais autant de multiplicateurs λ_j attachés aux contraintes d'exclusion g_j : ici, $x \geq 0$ et $y \geq 0$ (donc, j = 1 et 2) pour éliminer toute solution où les quantités optimales seraient négatives Le lagrangien généralisé s'écrit alors : $L = U(x, y) + \lambda (R - P_X x - P_Y y) + \sum \lambda_j g_j$.
Les conditions de Kühn et Tücker d'optimisation sont de trois sortes :

1) Annulation des dérivées partielles de L par rapport aux biens X et Y :
$dL / dx = 0$ et $dL / dy = 0$.
2) Annulation des conditions d'exclusion :
$\lambda (R - P_X x - P_Y y) = 0$
$\lambda_j g_j = 0$ pour tout j.
3) Tous les multiplicateurs λ et λ_j doivent être positifs ou nuls.

Dans notre exemple, la fonction d'utilité est précisément "additivement séparable".
Il faudrait donc en toute rigueur lui appliquer la méthode de Kühn et Tücker de la manière suivante.

Les contraintes sont au nombre de trois : $R = P_X x + P_Y y$; $x \geq 0$ et $y \geq 0$, et le lagrangien s'écrit :

$$L = x + y + xy + \lambda (R - P_X x - P_Y y) + \lambda_1 x + \lambda_2 y$$

(avec les trois multiplicateurs non négatifs).

Les premières conditions s'écrivent :

$$dL / dx = 1 + y - \lambda P_X + \lambda_1 = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$dL / dy = 1 + x - \lambda P_Y + \lambda_2 = 0 \qquad \text{(II)}$$

Les conditions d'exclusion s'écrivent :

$$\lambda (R - P_X x - P_Y y) = 0 \qquad \text{(III)}$$

$$\lambda_1 x = 0 \qquad \text{(IV)}$$

$$\lambda_2 y = 0 \qquad \text{(V)}$$

On a donc affaire à un système de 5 équations à 5 inconnues : x, y, λ, λ_1, λ_2.

Comme il peut y avoir une solution en coin, il faut explorer *3 hypothèses* :

-1- On a à la fois $x > 0$ et $y > 0$.

Alors, λ_1 et λ_2 sont nuls, et par conséquent λ est non nul en fonction des relations (I) et (II). La relation (III) indique alors que l'on a bien $R = P_X x + P_Y y$.

On en revient alors au système à trois équations du lagrangien simple :

$$1 + y - \lambda P_X = 0$$

$$1 + x - \lambda P_Y = 0$$

$$R - P_X x - P_Y y = 0$$

À partir des deux premières équations, on obtient : $(1+y) / (1+x) = P_X / P_Y$

À partir de la troisième, on en déduit directement : $y = - (P_X / P_Y) * x + R / P_Y$

Par substitution, on obtient :

$$y = [P_X + R - P_Y] / 2P_Y$$

pour avoir $y > 0$, il faut $R > P_Y - P_X$

$$x = [P_Y + R - P_X] / 2P_X$$

pour avoir $x >0$, il faut avoir $R > P_X - P_Y$

Autrement dit, pour avoir $x > 0$ et $y > 0$, il faut $R > | P_X - P_Y |$

-2- On a $x > 0$ et $y = 0$.

Alors, $\lambda_1 = 0$, $\lambda > 0$ et $R - P_X x - P_Y y = 0$

Et comme $y = 0$, on a $R = P_X x$, soit $x = R / P_X$.

Mais il convient de vérifier que sont satisfaites les deux conditions premières et celle du signe de λ_2 :

La première condition s'écrit : $1 + y - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \lambda = (1 + y) / P_X$

Par substitution dans la seconde, on obtient :

$\lambda_2 = (P_Y - R - P_X) / P_X$ et pour avoir $\lambda_2 \geq 0$, il faut $R < P_Y - P_X$.

-3- On a $x = 0$ et $y > 0$.

Alors, $\lambda_2 = 0$, $\lambda > 0$ et $R - P_X x - P_Y y = 0$

Et comme $x = 0$, on a $R = P_Y y$, soit $y = R / P_Y$

Il faut aussi vérifier que sont satisfaites les deux conditions premières et celle du signe de λ_1 :

La deuxième condition s'écrit : $1 + x - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \lambda = (1+x) / P_Y$

Par substitution dans la première, on obtient :

$\lambda_1 = (P_X - R - P_Y) / P_Y$ et pour avoir $\lambda_1 \geq 0$, il faut avoir $R < P_X - P_Y$.

En résumé,

si $R < P_Y - P_X$, $y = 0$ et $x > 0$ ($x = R / P_X$)

si $R < P_X - P_Y$, $x = 0$ et $y > 0$ ($y = R / P_X$)

si R > | P_X - P_Y | , x > 0 et y > 0.

2) Le raisonnement économique pour la détermination de l'équilibre

Le raisonnement économique peut être conduit de deux façons selon la manière dont on énonce les conclusions de l'optimisation :

a) Pour le consommateur, son équilibre est atteint quand son taux psychologique d'échange des deux biens, que donne le taux marginal de substitution de X à Y (TMS $_{X,Y}$), est égal au taux objectif d'échange fourni par le marché au travers du rapport des prix de ces deux biens. Le consommateur atteint donc son équilibre quand le taux auquel il *veut* échanger les deux biens l'un contre l'autre est égal au taux auquel il *peut* concrètement les échanger sur le marché.
Le TMS $_{X,Y}$ est le rapport -posé comme positif- de la quantité de Y que le consommateur accepte de sacrifier et la quantité -infinitésimale- de X qu'il désire avoir en plus, tout en conservant le même niveau d'utilité : TMS $_{X,Y}$ = - dy / dx. Le TMS est par conséquent égal, en valeur absolue, à la pente de la courbe d'indifférence au point considéré.
On démontre aussi que TMS $_{X,Y}$ = U'_X / U'_Y , rapport des utilités marginales des deux biens. Cela explique d'ailleurs, à côté de la démonstration graphique, que le TMS décroisse au fur et à mesure que l'on substitue du X à du Y puisque progressivement l'utilité marginale de X diminue pendant que celle de Y augmente (1ère loi de Gossen).

Remarques :

1- En définissant le $TMS_{X,Y}$ par le rapport - dy / dx, on indique tout aussi bien quelle quantité de Y il faut sacrifier pour avoir une "toute petite quantité" - disons une unité - de plus de X (tout en conservant le même degré de satisfaction) que la quantité de Y que l'on peut avoir en plus en abandonnant une "toute petite quantité" - disons une unité - de X (tout en conservant le même degré de satisfaction). Si on définissait par contre le TMS par le rapport - dx / dy, que l'on noterait alors $TMS_{Y,X}$, on indiquerait tout aussi bien quelle quantité de X il faut sacrifier pour avoir une "toute petite quantité" - disons une unité - de plus de Y (tout en conservant le même degré de satisfaction) que la quantité de X que l'on peut avoir en plus en abandonnant une "toute petite quantité" - disons une unité - de Y (tout en conservant le même degré de satisfaction). Chacun de ces deux TMS est évidemment égal à l'inverse de l'autre : ainsi, $TMS_{Y,X}$ = 1 / $TMS_{X,Y}$.

2- Le TMS peut être également défini comme étant la "propension marginale à payer", en ce sens que la valeur de TMS $_{X,Y}$ indique la quantité de l'un des deux biens que le consommateur est disposé à fournir en "paiement" d'une quantité infinitésimale de l'autre, à niveau d'utilité inchangé.

3- L'égalité du TMS et du rapport des utilités marginales est établie mathématiquement par la différenciation totale de la fonction d'utilité :
De manière générale, U = f (x,y) => dU = (δU / δx) * dx + (δU / δy) * dy.
Pour le calcul du TMS, on conserve par définition le même niveau d'utilité => dU = 0

$$\Rightarrow (\delta U / \delta x) * dx + (\delta U / \delta y) * dy = 0$$
$$\Rightarrow (\delta U / \delta x) * dx = - (\delta U / \delta y) * dy$$
$$\Rightarrow (\delta U / \delta x) / (\delta U / \delta y) = - dy / dx$$
$$U'_X / U'_Y = TMS_{X,Y}$$

À l'équilibre, on a : TMS $_{X,Y}$ = P_X / P_Y ,

Et comme TMS = U'_X /U'_Y ,

on a à l'équilibre : $U'_X / U'_Y = P_X / P_Y$,

soit : $(dU/dX) / (dU/dY) = P_X / P_Y$

rapport des utilités marginales = rapport des prix

<u>b) Selon la deuxième loi de Gossen, le consommateur atteint son équilibre avec le panier de biens qui égalise les utilités marginales pondérées par les prix des différents biens</u> :

$$U'_X / P_X = U'_Y / P_Y$$

expression à partir de laquelle on peut évidemment retrouver l'égalité précédente.

<u>Remarque</u> : Dès que le nombre de biens considérés est supérieur à 2, mieux vaut utiliser la 2ème loi de Gossen.

Dans le cadre de notre application, on a :

$$\text{Max } U = x + y + xy$$
$$\text{sous } R = P_X * x + P_Y * y = 1000$$

Alors, $(dU/dX) / (dU/dY) = P_X / P_Y$

$$\Rightarrow (1 + y) / (1 + x) = P_X / P_Y \quad (1)$$

ou $U'_X / P_X = U'_Y / P_Y$

$$\Rightarrow (1+y) / P_X = (1+x) / P_Y \quad (1')$$

Donc, (1) ou (1') $\Rightarrow y = [P_X / P_Y * (1 + x)] - 1$ (2)

(1) ou (1') $\Rightarrow x = [P_Y / P_X * (1 + y)] - 1$ (3)

<u>Remarques importantes</u> :

1- Pour des niveaux de prix donnés, les relations (2) et (3) expriment l'équation du "chemin d'expansion du consommateur" (courbe de consommation-revenu ou eutope). Par définition, le chemin d'expansion est le lieu géométrique des points dont le TMS est égal au rapport des prix des biens ; c'est donc aussi le lieu géométrique des équilibres du consommateur pour un même rapport de prix et différents niveaux de revenu.

2- Chacune de ces interprétations correspond à l'un des deux modes de résolution du lagrangien présentés plus haut. On peut établir en quelque sorte la correspondance suivante :

1ère résolution du lagrangien par division des deux premières dérivées partielles <--> égalité du rapport des utilités marginales (donc, du TMS) avec le rapport des prix ;

2ème résolution du lagrangien à partir de la valeur du multiplicateur λ <--> égalité des utilités marginales pondérées par les prix (deuxième loi de Gossen).

<u>3) L'expression des fonctions de demande</u>

Le panier optimal recherché correspond à l'un des points du chemin d'expansion qui vient d'être trouvé. Mais il doit satisfaire aussi la contrainte de budget : nous avons déjà précisé que son point représentatif est nécessairement sur la droite de budget. Par conséquent, *le panier optimal est géométriquement décrit par le point de concours entre le chemin d'expansion et la droite de budget*.

Comme $R = P_X * x + P_Y * y$,

$$P_X * x = R - P_Y * y \Rightarrow x = [R - P_Y * y] / P_X \qquad (4)$$
$$P_Y * y = R - P_X * x \Rightarrow y = [R - P_X * x] / P_Y \qquad (5)$$

(2) et (4) $\Rightarrow$
$$y = P_X / P_Y [1 + (R - P_Y y) / P_X] -1$$
$$= P_X / P_Y + (R - P_Y y) / P_Y - (P_Y / P_Y)$$
$$= [P_X + R - P_Y y - P_Y] / P_Y$$
$$\Rightarrow y P_Y = P_X + R - P_Y y - P_Y$$
$$\Rightarrow 2y P_Y = P_X + R - P_Y$$

$\Rightarrow y = [P_X + R - P_Y] / 2P_Y$ (Fonction de demande du bien Y)

(3) et (5) $\Rightarrow$
$$x = P_Y / P_X * [1 + (R - P_X x] / P_Y)] - 1$$
$$= P_Y / P_X + (R - P_X x) / P_X - (P_X / P_X)$$
$$= [P_Y + R - P_X x - P_X] / P_X$$
$$\Rightarrow x P_X = P_Y + R - P_X x - P_X$$
$$\Rightarrow 2x P_X = P_Y + R - P_X$$

$\Rightarrow x = [P_Y + R - P_X] / 2P_X$ (Fonction de demande du bien X)

Conclusion : La demande de chacun des deux biens dépend ainsi du prix du bien considéré, du prix de l'autre bien et du revenu du consommateur.
Plus précisément, chacune de ces fonctions vérifie la *double loi microéconomique de la demande* :

- la demande d'un bien est normalement une fonction décroissante du prix de ce bien ;
- la demande d'un bien est normalement une fonction croissante du revenu du consommateur.

Remarques :

1- La double loi microéconomique de la demande souffre quelques exceptions remarquables :

- la demande est une fonction croissante du prix du bien sous trois effets possibles :

l'effet Giffen : la demande croît avec le prix quand le bien est de première nécessité (l'effet de revenu fait plus qu'annihiler l'effet de substitution : voir plus loin) ;

l'effet Veblen : la demande des biens de luxe peut croître avec le prix à cause du comportement ostentatoire de certains consommateurs ;

l'effet d'anticipation : en situation d'incertitude, la demande peut croître lorsque les consommateurs nourrissent des anticipations inflationnistes ; cet effet peut être renforcé par un effet de spéculation (acheter d'autant plus maintenant que l'on espère pouvoir vendre plus cher plus tard).

- la demande est une fonction décroissante du revenu du consommateur pour les biens de type Giffen à cause de l'effet qualité : la croissance de son revenu amène le consommateur à substituer progressivement aux biens de qualité médiocre des biens de qualité supérieure (voir plus loin).

2- Ces deux fonctions de demande sont des fonctions homogènes de degré 0, ce qui traduit l'hypothèse d'absence d'illusion monétaire du consommateur.
Une fonction économique est dite homogène de degré k si, en multipliant ses variables déterminantes par la même valeur positive λ, la fonction est multipliée par λ^k :
On a bien pour la fonction y : $[\lambda P_X + \lambda R - \lambda P_Y] / 2\lambda P_Y = [P_X + R - P_Y] / 2P_Y$, soit $y * \lambda^0$.
De même pour la fonction x.

Dire que les fonctions de demande de X et de Y sont homogènes de degré 0 et que le consommateur n'est donc victime d'aucune illusion monétaire revient à considérer ces fonctions de demande comme dépendant de variables *réelles* : des prix relatifs des biens et du revenu réel du consommateur ; on retrouve là l'analyse dichotomique.

3- Étant linéaires par rapport à l'ensemble des prix et du revenu, ces deux fonctions de demande appartiennent à la catégorie des fonctions dite des "fonctions de Stone".

4- Une fonction est dite homogène linéaire quand k = 1. L'adjectif linéaire s'applique à "homogène" et non à "fonction" : une fonction peut être en effet homogène sans être linéaire.
En théorie de la production, à une fonction de production homogène linéaire correspondent des rendements d'échelle constants et des courbes de coûts moyens et marginaux de longue période qui sont horizontales et confondues.
La fonction de production homogène linéaire le plus souvent utilisée est la fonction dite de Cobb-Douglas : elle s'écrit $Q = L^{\alpha} K^{1-\alpha}$ avec $0<\alpha<1$
Par ailleurs, lorsque la fonction est homogène, quel qu'en soit le degré, le chemin d'expansion est une droite : mais la réciproque n'est pas toujours vraie : un chemin d'expansion linéaire ne correspond pas nécessairement à une fonction homogène.

5- La fonction d'utilité peut avoir une expression de type Cobb-Douglas : $U = x^{\alpha} y^{\beta}$, avec α et $\beta > 0$.
On montre que les fonctions de demande des deux biens sont alors :

$$x = (R / P_X) * (\alpha / \alpha+\beta) \text{ et } y = (R / P_Y) * (\beta / \alpha+\beta)$$

Autrement dit, la demande optimale de chaque bien est égale à la quantité maximale qu'il est possible de demander en fonction du revenu dont on dispose, pondérée par le poids relatif de l'exposant, chaque exposant mesurant l'élasticité de l'utilité par rapport à la quantité demandée du bien considéré.

6- Quand on désire représenter graphiquement les fonctions de demande, celles-ci doivent être établies en fonction du seul prix du bien ou du seul revenu du consommateur. La courbe de demande en fonction du prix dérive de la "courbe de consommation-prix", lieu géométrique des équilibres du consommateur quand le prix du bien varie, ceteris paribus, et la courbe de demande en fonction du revenu dérive de la "courbe de consommation-revenu", lieu géométrique des équilibres du consommateur quand le revenu de celui-ci varie, ceteris paribus.

7- Il est important de préciser les domaines de définition des fonctions de demande. Il convient surtout de calculer la valeur-limite que doit prendre le revenu pour que les demandes ne soient pas négatives (on retrouve ici le problème soulevé plus haut que peuvent poser les fonctions d'utilité lorsqu'elles sont "additivement séparables"). Ici, on doit avoir : $R > | P_X - P_Y |$.

Les fonctions de demande permettent de trouver immédiatement les valeurs du panier optimal de chacune des deux périodes considérées.

A la période (0), l'équilibre du consommateur $E^{(0)}$ est défini par les valeurs suivantes :

$x^{(0)} = [6 + 1000 - 12] / (2*12) = 41,4167$
$y^{(0)} = [12 + 1000 - 6] / (2*6) = 83,8333$
$U^{(0)} = 3596,8486$

A la période (n), l'équilibre du consommateur $E^{(n)}$ est défini par les valeurs suivantes :

Situation 1 :	*Situation 2* :
$x^{(n)} = 62,375$	$x^{(n)} = 62,625$
$y^{(n)} = 83,50$	$y^{(n)} = 49,90$
$U^{(n)} = 5354,1875$	$U^{(n)} = 3237,5125$

Les schémas n^{os} 1 et 2 décrivent la résolution graphique.

L'évolution des prix des deux biens fait donc tout logiquement varier l'équilibre du consommateur. Le déplacement de celui-ci correspond à ce que l'on appelle l'"effet-prix".
Pour mieux comprendre la relation qui existe entre la demande et le prix, il convient d'analyser cet effet-prix.

Remarques importantes :

1- On appelle **fonction d'utilité indirecte** la fonction d'utilité (V) obtenue en remplaçant les arguments de la fonction d'utilité directe par l'expression des fonctions de demande (marshalliennes) des biens. Dans le cadre de notre application, on a :

$V = x + y + x\,y$

$= [P_Y + R - P_X] / 2P_X + [P_X + R - P_Y] / 2P_Y + [P_Y + R - P_X] / 2P_X * [P_X + R - P_Y] / 2P_Y$

Après développement et simplification, on trouve :

$V = [P_Y^2 + 2RP_Y - 2P_XP_Y + P_X^2 + 2RP_X + R^2] / 4\,P_XP_Y.$

Cette fonction d'utilité indirecte précise l'utilité maximale que l'on peut atteindre pour des niveaux donnés de prix des biens et de revenu du consommateur ; elle prouve aussi s'il en est besoin que l'utilité est une fonction décroissante des prix et une fonction croissante du revenu.
La dérivée de cette fonction par rapport à R mesure ce que l'on appelle l'"utilité marginale du revenu".
On a ici : $dV / dR = [2P_X + 2P_Y + 2R] / 4\,P_X\,P_Y = [P_X + P_Y + R] / 2\,P_X\,P_Y$
En fonction des valeurs de la période (0), on obtient : $dV / dR = 7{,}0694$, ce qui correspond à l'utilité apportée par la dernière unitaire monétaire dépensée.
Cette dérivée de la fonction d'utilité indirecte par rapport au revenu est égale au multiplicateur de Lagrange λ puisque $dL / dR = \lambda$. On vérifie cela dans notre application en reportant par exemple les valeurs de la période (0) dans les expressions du multiplicateur de Lagrange trouvées lors de la résolution mathématique du problème d'optimisation :
on a bien $\lambda = (1+y) / P_X = (83{,}8333 + 1) / 12 = 7{,}0692$ et $\lambda = (1+x) / P_Y = (41{,}4167 + 1) / 6 = 7{,}0695$.
Par conséquent, le multiplicateur de Lagrange représente l'utilité marginale du revenu : il mesure dans quelle proportion l'utilité du consommateur s'améliore lorsque sa contrainte budgétaire se desserre suite à une augmentation de son revenu.

2- La remarque précédente établit l'égalité, pour les valeurs optimales, entre la dérivée de la fonction d'utilité indirecte par rapport au revenu et la dérivée également par rapport au revenu de la fonction lagrangienne établie à partir de la fonction objectif initiale (la fonction d'utilité directe). Ce résultat peut être généralisé aux autres variables que sont les prix des biens : les deux dérivées partielles par rapport aux prix de la fonction d'utilité indirecte sont égales au dérivées du lagrangien par rapport à ces prix.
Autrement dit, $dV / dP_i = dL / dP_i$, où $dL / dP_X = - \lambda\, x$ et où $dL / dP_Y = - \lambda\, y$.
Comme $\lambda = dL / dR$, on peut écrire : $x = - (dV / dP_X) / (dV / dR)$ et $y = - (dV / dP_Y) / (dV / dR)$.
Ces deux équations expriment ce que l'on appelle l'*identité de Roy*.
On en conclut que les demandes des deux biens peuvent être obtenues par l'intermédiaire des dérivées de la fonction d'utilité indirecte : plus précisément, la demande du bien i est égale, au signe près, au rapport des dérivées de la fonction d'utilité indirecte par rapport au prix de i et par rapport au revenu.

Le fait que la dérivée de la fonction d'utilité indirecte par rapport à l'un de ses paramètres soit égale à la dérivée du lagrangien de la fonction objectif initiale par rapport à ce paramètre évaluée au point extremum, correspond à ce que l'on appelle le *théorème de l'enveloppe* ; parce qu'on l'applique au premier chef au calcul du producteur pour expliquer que la dérivée du coût de longue période (CLP) est égale à la dérivée de la fonction de coût de courte période (CCP) à condition d'évaluer celle-ci au point optimal : les courbes de CCP et la courbe de CLP dite précisément courbe enveloppe ont la même tangente lorsqu'elles se touchent.

§2) La décomposition de l'effet-prix : l'équation de Slutsky.

Étudions le cas du seul bien X et considérons la situation 1 où, lors de la période (n), il n'y a que le prix de X qui varie (en passant de 12 à 8), ceteris paribus : R = 1000 et $P_Y^{(n)} = 6$.

Pour expliquer le passage de $E^{(0)}$ à $E^{(n)}$, situation 1, on décompose l'effet-prix total en deux sous-effets : l'effet de substitution et l'effet de revenu (qu'il vaudrait d'ailleurs mieux appeler effet de revenu réel ou effet de pouvoir d'achat).

L'effet de revenu correspond à la variation de la quantité demandée suite à la variation du pouvoir d'achat qu'entraîne la variation du prix du bien.

L'effet de substitution, quant à lui, résulte du fait que, indépendamment de la variation du pouvoir d'achat qu'entraîne la variation du prix du bien, celle-ci modifie, ceteris paribus, le rapport des prix des deux biens en présence et que, à partir du moment où ces deux biens sont relativement substituables, cela va inciter le consommateur à réaliser une substitution entre les deux biens.

L'explicitation des effets de substitution et de revenu peut être faite géométriquement et algébriquement.
Qu'il s'agisse de l'analyse géométrique ou de l'analyse algébrique, le raisonnement peut être tenu de deux façons différentes quant à la manière de mettre en évidence l'effet de substitution, c'est-à-dire l'effet de la modification de prix sur la demande en supposant le revenu réel constant.
La "méthode de Slutsky" consiste à raisonner à pouvoir d'achat constant tandis que la "méthode de Hicks" consiste à raisonner à utilité constante. Les deux méthodes s'opposent en définitive sur la définition de la notion de revenu réel : pour Slutsky, le revenu réel est constant lorsqu'il permet d'acquérir le même panier de biens qu'initialement, en dépit de la variation du prix du bien et indépendamment de la carte d'indifférence du consommateur, alors que pour Hicks, le revenu réel est constant lorsqu'il permet de conserver le même niveau d'utilité qu'initialement.
Pour généraliser, on pourrait dire que la mise en évidence de l'effet de substitution se fait à "richesse" du consommateur constante, cette richesse pouvant être évaluée tout aussi bien par un panier donné de biens que par un certain niveau d'utilité.

Remarque : Contrairement à la méthode de Hicks, la méthode de Slutsky ne nécessite pas la connaissance de la carte du consommateur. Cela explique qu'elle soit d'application économétrique plus facile et qu'elle ait été adoptée par P. Samuelson, le théoricien des "préférences révélées" (on donne d'ailleurs souvent le nom de cet économiste américain à la méthode de Slutsky).

A- La méthode de E. Slutsky : mise en évidence de l'effet de substitution à pouvoir d'achat constant.

1) La décomposition slutskienne de l'effet-prix.

a) L'effet de substitution.

Par définition P_X varie. Supposons que le consommateur désire malgré tout accéder au même panier optimal qu'en période (0), c'est-à-dire bénéficier du même pouvoir d'achat. Pour cela, il faudrait une modification de son revenu nominal et que celui-ci passe de R à $R^{(S)}$ (dans notre application, comme nous le chiffrerons plus loin, la diminution du prix de X fait que $R^{(S)}$ est en diminution par rapport à R) :

$R^{(S)} = P_X^{(n)}\, x^{(0)} + P_Y^{(n)}\, y^{(0)}$

Comme $R = P_X^{(0)}\, x^{(0)} + P_Y^{(0)}\, y^{(0)}$

On a : $R^{(S)} - R = x^{(0)} * (P_X^{(n)} - P_X^{(0)})$, puisque $P_Y^{(n)} = P_Y^{(0)}$

Soit : $\Delta R = x^{(0)} * \Delta P_X$ (les deux variations sont de même sens).

Δ R est la variation du revenu nominal qu'il faudrait que le consommateur enregistre pour pouvoir se procurer exactement le panier optimal initial malgré la variation du prix de X.

L'effet de substitution de Slutsky sur la demande de X est la quantité optimale de ce bien qui serait demandée par le consommateur s'il disposait du revenu $R^{(S)}$, en tenant compte du nouveau rapport de prix entre X et Y.

Géométriquement, cet effet se traduit par la rotation de la droite de budget $B^{(0)}$ autour de $E^{(0)}$ pour prendre une pente égale au nouveau rapport de prix ; et la quantité $x^{(S)}$ correspondant à cet effet est donnée par l'abscisse du point $E^{(S)}$ de tangence de cette droite de budget transitoire avec l'une des courbes d'indifférence de la carte du consommateur. Voir schéma n° 3.

Algébriquement, on peut écrire :

$$\boldsymbol{\Delta x^{(Ds)} = x^{(D)}\,[P_X^{(n)} ; P_Y^{(n)} ; R^S] - x^{(D)}\,[P_X^{(0)} ; P_Y^{(0)} ; R]}$$

Précisons le sens de nos notations : $\Delta x^{(Ds)}$ = effet de substitution sur la demande de X ; $x^{(D)}\,[P_X^{(n)} ; P_Y^{(n)} ; R^{(S)}]$ = la demande du bien X est fonction du prix des deux biens lors de la période (n) ainsi que du revenu $R^{(S)}$.

Dans l'application, on a :

$\Delta R = 41{,}4167 * (8 - 12) = - 165{,}67 \Rightarrow R^{(S)} = 1000 - 165{,}67 = 834{,}33$

$$\begin{aligned}\Delta x^{(Ds)} &= x^{(D)}\,[8 ; 6 ; 834{,}33] - x^{(D)}\,[12 ; 6 ; 1000] = x^{(S)} - x^{(0)}\\ &= 52{,}0206 - 41{,}4167\\ &= 10{,}6039\end{aligned}$$

et $y^{(S)} = 69{,}6942$

D'où un niveau d'utilité $U^{(S)} = x^{(S)} + y^{(S)} + x^{(S)}y^{(S)} = 3747{,}2489$

L'effet de substitution est toujours "négatif" en ce sens qu'il induit une variation de la demande de sens inverse à la variation du prix.

L'effet de substitution est souvent appelé "variation de la demande compensée" parce que la variation du prix du bien est compensée ici par une variation du revenu juste suffisante pour permettre au consommateur d'acheter le panier initial. L'effet de substitution correspond ainsi à un effet de compensation.

b) L'effet de revenu (réel)

Géométriquement, l'effet de revenu se traduit par le déplacement, parallèlement à elle-même, de la droite de budget de sa position provisoire après le jeu de l'effet de substitution jusqu'à sa position finale. On passe ainsi de $E^{(S)}$ à $E^{(n)}$ en ce qui concerne l'équilibre et de $x^{(S)}$ à $x^{(n)}$ en ce qui concerne les quantités de X. Voir <u>schéma n° 3</u>.

Comme l'effet de revenu correspond à la variation de la demande de X quand le revenu du consommateur passe de $R^{(S)}$ à R, *algébriquement*, il s'écrit :

$$\mathbf{\Delta\, x^{(Dr)} = x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, P_Y^{(n)}\, ;\, R] - x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, P_Y^{(n)}\, ;\, R^{(S)}]}$$

L'effet de revenu peut opérer sur la demande du bien dans les deux sens : dans le même sens que le revenu quand le bien est normal et en sens opposé quand le bien est inférieur.

Dans l'application, on a :

$\Delta\, x^{(Dr)}$ $= x^{(D)}\, [8\, ;\, 6\, ;\, 1000] - x^{(D)}\, [8\, ;\, 6\, ;\, 834{,}33]$
$= 62{,}375 - 52{,}0206 = + 10{,}3544$
(X est "normal")
=> x passe donc de 52,0206 à 62,375,

On a de même : $\Delta\, y^{(Dr)}$ $= y^{(D)}\, [8\, ;\, 6\, ;\, 1000] - y^{(D)}\, [8\, ;\, 6\, ;\, 834{,}33]$
$= 83{,}50 - 69{,}6942 = + 13{,}8058$

Ces augmentations de consommation sont rendues possibles par l'amélioration du pouvoir d'achat $[R - R^{(S)}] = + 165{,}67$.
On vérifie effectivement que : $(10{,}3544 * 8) + (13{,}8058 * 6) = 165{,}67$.

<u>2) La variation de la demande</u>

<u>a) La variation de la demande en valeur absolue.</u>

Par définition, on a : $\Delta\, x^{(D)} = x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, R] - x^{(D)}\, [P_X^{(0)}\, ;\, R]$

Dans l'application, $\Delta\, x^{(D)} = 62{,}375 - 41{,}4167 = 20{,}9583$

Après décomposition, on a : $\Delta\, x^{(D)} = \Delta\, x^{(Ds)} + \Delta x^{(Dr)}$
algébriquement : $20{,}9583 = 10{,}6039 + 10{,}3544$
graphiquement : $x^{(0)} \text{->} x^{(n)}$ $x^{(0)} \text{->} x^{(S)}$ $x^{(S)} \text{->} x^{(n)}$

En remplaçant les effets de substitution et de revenu par leur expression respective, on obtient :

$x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, R] - x^{(D)}\, [P_X^{(0)}\, ;\, R]$
$= [x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, R^{(S)}] - x^{(D)}\, [P_X^{(0)}\, ;\, R]] + [x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, R] - x^{(D)}\, [P_X^{(n)}\, ;\, R^{(S)}]]$

Et après simplification, cette égalité devient une identité, dite <u>identité de Slutsky</u>.

<u>Remarque sur le jeu des deux sous-effets selon la nature du bien X :</u>

	$\Delta\, x^{(D)}$ = Effet total =	$\Delta\, x^{(Ds)}$ + Effet de subst. +	$\Delta\, x^{(Dr)}$ Effet de revenu
Bien normal et supérieur	-	-	-
Bien inférieur mais normal	-	-	+
Bien inférieur de type Giffen	+	-	++

b) La variation de la demande en taux de variation.

Appelons $\Delta x^{(DR)}$ l'opposé de $\Delta x^{(Dr)}$:
$\Delta x^{(DR)} = - \Delta x^{(Dr)} = x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R^{(S)}] - x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R]$
Alors,
$\mathbf{\Delta x^{(D)} = \Delta x^{(Ds)} - \Delta x^{(DR)}}$

Et en divisant par P_X :
$\Delta x^{(D)} / \Delta P_X = \underbrace{[\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{PA\ constant}}_{\text{taux de variation quand le prix varie et que le revenu est ajusté pour que le pouvoir d'achat reste constant de manière à permettre au consommateur de garder son panier optimal initial.}} - \Delta x^{(DR)} / \Delta P_X$

Par ailleurs, $\Delta R = x^{(0)} * \Delta P_X \Rightarrow \Delta P_X = \Delta R / x^{(0)}$
Alors,
$\Delta x^{(D)} / \Delta P_X = [\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{PA\ constant} - \Delta x^{(DR)} / [\Delta R / x^{(0)}]$,

soit la relation suivante, dite équation de SLUTSKY :

$$\mathbf{\underbrace{\Delta x^{(D)} / \Delta P_X}_{(1)} = \underbrace{[\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{PA\ constant}}_{(2)} - \underbrace{(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)}}_{(3)}}$$

(1) -> $\Delta x^{(D)} / \Delta P_X = [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R] - x^{(D)} [P_X^{(0)} ; R]] / \Delta P_X$ = taux de variation de la demande de X quand le prix du bien varie, ceteris paribus. Cela correspond à la pente de la courbe de demande en fonction du prix = effet-prix total.
(2) -> $\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X = [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R^{(S)}] - x^{(D)} [P_X^{(0)} ; R]] / \Delta P_X$ = taux de variation de la demande de X quand son prix varie et que le revenu est ajusté pour laisser le pouvoir d'achat constant de manière à rendre accessible le panier initial = effet de substitution de Slutsky. Cela correspond à la pente de la courbe de demande compensée de Slutsky.
(3) -> $(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)}$
$= x^{(0)} * [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R^{(S)}] - x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R]] / [R^{(S)}-R]$ = taux de variation de la demande quand le pouvoir d'achat varie sous l'effet de la variation du prix du bien, dans le cadre du nouveau rapport de prix = effet de revenu, d'autant plus fort que la demande initiale X est importante.

Dans notre application, on a bien :
20,9583 / 4 = 10,6039 / 4 - (10,3544 / - 165,67) * 41,4167, soit : 5,2396 = 2,6510 + 2,5886

B- La méthode de J. Hicks : mise en évidence de l'effet de substitution à utilité constante.

Pour ne pas alourdir ce texte, on se contentera d'indiquer les différences entre l'analyse d'Hicks et celle de Slutsky sans refaire tous les développements, en présentant la décomposition hicksienne de l'effet-prix et en reformulant l'équation de Slutsky dans le cadre de cette décomposition.

1) La décomposition hicksienne de l'effet-prix.

La différence essentielle entre les analyses de Slutsky et de Hicks est que l'effet de substitution est isolé par le premier à pouvoir d'achat constant alors qu'il l'est par le second à utilité constante.

Géométriquement, rappelons que l'effet de substitution de Slutsky est obtenu par rotation de la droite de budget autour de $E^{(0)}$, point d'équilibre initial, pour prendre une pente correspondant au nouveau rapport de prix et entrer en tangence avec une autre courbe d'indifférence -$U^{(S)}$- de la carte du consommateur, déterminant ainsi un équilibre transitoire $E^{(S)}$. Dans l'analyse de Hicks, l'effet de substitution est mis en évidence en traçant une droite de budget transitoire parallèle à la nouvelle droite de budget -pour traduire le nouveau rapport de prix- qui entre en tangence avec la courbe d'indifférence initiale correspondant par conséquent au niveau d'utilité de départ $U^{(0)}$. On obtient ainsi un équilibre transitoire $E^{(H)}$ caractérisé par le maintien du niveau initial d'utilité au prix d'une substitution entre les deux biens selon l'évolution de leurs prix relatifs et d'une modification corrélative du revenu nominal que le consommateur devrait entregistrer.
Le passage de $E^{(H)}$ à $E^{(n)}$ traduit l'effet de revenu. Voir le schéma n° 4.

Algébriquement, l'analyse hicksienne aboutit aux résultats suivants lorsqu'on l'applique à notre exemple :

a) Effet de substitution de Hicks :

A l'équilibre transitoire $E^{(H)}$, on a l'égalité entre la pente de la courbe d'indifférence $U^{(0)}$ et la pente de la droite de budget transitoire qui est par construction la même que celle de la droite de budget de la période (n), autrement dit égale au nouveau rapport de prix :

Pente de la courbe $U^{(0)}$ d'équation $y = (3596{,}8486 - x) / (1 + x)$:
$- (U^{(0)} + 1) / (1 + x)^2 = - 3597{,}8486 / (1 + x)^2$
Pente de la droite de budget de la période (n) : $- 8 / 6$
Egalité des deux pentes => $- 3597{,}8486 / (1+x)^2 = - 8 / 6 = - 1{,}3333$
=> $x^{(H)} = 50{,}946$ (+9,5293)
=> $y^{(H)} = (3596{,}8486 - 50{,}946) / (50{,}946 + 1) = 68{,}2613$ (- 15,572)
=> $R^{(H)} = (50{,}946 * 8) + (68{,}2613 * 6) = 817{,}1358$
$R^{(H)} - R = - 182{,}8642$

Remarque : Deux autres raisonnements peuvent être tenus.

1- Le premier se fonde sur le fait que $x^{(H)}$ correspond à l'abscisse du point de concours de la courbe d'utilité initiale $U^{(0)}$ avec le chemin d'expansion (lieu géométrique de tous les équilibres du consommateur pour un certain rapport de prix) calculé pour le nouveau rapport de prix :

On a :
pour équation de $U^{(0)} = x + y + xy = 3596{,}8486$
pour équation du chemin d'expansion : $y = [P_X / P_Y * (1 + x)] - 1$ avec $P_X / P_Y = 8/6 = 4/3$

Donc, par substitution, on peut écrire : x + [4/3 *(1+x) -1] + x * [4/3 *(1+x) -1] = 3596,8486

Soit : $4 x^2 + 8 x - 10789{,}5456 = 0$, équation du second degré dont il faut chercher la racine positive.

$\Delta = b^2 - 4 ac = 64 + 172632{,}7296 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 415{,}568$

$x^{(H)} = (-b + \sqrt{\Delta}) / 2a = (-8 + 415{,}568) / 8 = 50{,}946.$

2- Le second raisonnement consiste à minimiser le revenu sous contrainte d'utilité :

Min $R = x P_X + y P_Y$ avec $P_X = 8$ et $P_Y = 6$

s/c : $U = x + y + xy = 3596{,}8486$

Cette méthode revient en fait à utiliser la fonction de demande compensée : voir la remarque à la fin de cette première partie (second point).

b) Effet de revenu de Hicks :

x passe de 50,946 à 62,375, soit + 11,429 ;

y passe de 68,2613 à 83,50, soit + 15,2387 ;

lesquelles augmentations de consommation sont rendues possibles par l'amélioration du pouvoir d'achat qu'a permise la diminution du prix de X, ceteris paribus.

On vérifie en effet que : $(11{,}429 * 8) + (15{,}2387 * 6) = R - R^{(H)} = 182{,}8642$

2) L'équation de Slutsky appliquée à l'analyse hicksienne de l'effet-prix.

Par analogie avec l'équation de Slutsky établie dans le cadre de l'analyse slutskienne, on peut écrire :

$$\underset{(1)}{\Delta x^{(D)} / \Delta P_X} = \underset{(2)}{[\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{U\ constante}} - \underset{(3)}{(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)}}$$

(1) -> $\Delta x^{(D)} / \Delta P_X = [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R] - x^{(D)} [P_X^{(0)} ; R]] / \Delta P_X$ = taux de variation de la demande de X quand le prix du bien varie, ceteris paribus. Cela correspond à la pente de la courbe de demande en fonction du prix = effet-prix total.

(2) -> $\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X = [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R^{(H)}] - x^{(D)} [P_X^{(0)} ; R]] / \Delta P_X$ = taux de variation de la demande de X quand son prix varie et que le revenu est ajusté pour laisser l'utilité égale à celle de la situation initiale = effet de substitution de Hicks. Cela correspond à la pente de la courbe de demande compensée de Hicks.

(3) ->$(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)}$

$= x^{(0)} * [x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R^{(H)}] - x^{(D)} [P_X^{(n)} ; R]] / [R^{(H)}-R]$ = taux de variation de la demande quand le pouvoir d'achat varie sous l'effet de la variation du prix du bien, dans le cadre du nouveau rapport de prix = effet de revenu, d'autant plus fort que la demande initiale X est importante.

Dans notre application, on obtient :

20,9583 / 4 = 9,5293 / 4 - (11,429 / - 182,8642) * 41,4167

5,2396 # 2,3823 + 2,5885

Remarque finale, de nature terminologique:

Selon ses besoins d'analyse, la théorie microéconomique est amenée à donner au concept de demande plusieurs acceptions.

Quatre distinctions méritent d'être faites.

1- Demande individuelle et demande collective.

Les fonctions de demande collective se déduisent des fonctions de demande individuelles des différents consommateurs par agrégation horizontale.

2- Demande non compensée et demande compensée.
Cette distinction concerne la demande individuelle.

• La *fonction de demande non compensée* correspond à la fonction de demande traditionnellement définie (d'où le fait qu'elle soit également appelée demande normale) et qui peut être concrètement observée, celle qui donc tient compte à la fois de l'effet de substitution et de l'effet de revenu (réel). Certains auteurs appellent "demande marhallienne" la demande normale, par opposition à la demande compensée (voir remarque 3 ci-après).

• La *fonction de demande compensée* est la fonction hypothétique qui ne prend en considération que l'effet de substitution : c'est donc celle que le consommateur exprimerait si son revenu était ajusté -compensé- de sorte que, en dépit de la variation du prix du bien, il conserve un même revenu réel constant (avec les deux définitions possibles, celle de Hicks et celle de Slutsky ; d'où les expressions de demande hicksienne ou slutskienne).
Graphiquement, la courbe de demande compensée a nécessairement une pente plus forte que celle de la demande non compensée puisque la première exclut contrairement à la seconde l'effet de revenu ; autrement dit, la demande compensée est moins élastique que la demande non compensée.
Algébriquement, les fonctions de demande compensées, celle de y et celle de x, peuvent être déterminées en minimisant la dépense pour un niveau de revenu réel donné. Si on prend la définition hicksienne, il s'agit de minimiser la dépense sous la contrainte du niveau d'utilité initiale. On peut alors écrire :

$$L = x\,P_X + y\,P_Y + \lambda\,[\,U - (x + y + xy)]$$
$$dL/dx = P_X - \lambda - \lambda y = 0 \qquad \text{(I)}$$
$$dL/dy = P_Y - \lambda - \lambda x = 0 \qquad \text{(II)}$$
$$dL/d\lambda = U - x - y - xy = 0 \qquad \text{(III)}$$
$$\text{(I)/(II)} \rightarrow P_X/P_Y = (1+y) / (1+x) \qquad \text{(IV)}$$

(IV) -> $x = (P_Y / P_X)\,(1+y) - 1$ (V)	(IV) -> $y = (P_X / P_Y)\,(1+x) - 1$ (VI)
(III) et (V)	(III) et (VI)
-> $U = (P_Y/P_X)\,(1+y) - 1 + y + [(P\,/P_X)\,(1+y) - 1]\,y$	-> $U = x + (P_X/P_Y)\,(1+x) - 1 + x\,[(P_X / P_Y)\,(1+x) - 1]$
$= (P_Y/P_X)\,(1+y)^2 - 1$	$= (P_X/P_Y)\,(1+x)^2 - 1$
=> $(1+y)^2 = (U + 1)\,(P_X / P_Y)$	=> $(1+x)^2 = (U + 1)\,(P_Y / P_X)$
=>$y = (U + 1)^{0,5}\,(P_X / P_Y)^{0,5} - 1$	=> $x = (U + 1)^{0,5}\,(P_Y / P_X)^{0,5} - 1$
(fonction de demande compensée de y)	(fonction de demande compensée de x)

On peut utiliser de telles relations, lors de la décomposition de l'effet-prix, pour déterminer l'effet de substitution.
Ainsi, dans notre application, on a $U^{(0)} = 3596{,}8486$.
La quantité de x optimale correspondant à l'effet de substitution est directement donnée par l'expression de la demande compensée : $x = (3596{,}8486 + 1)^{0,5}\,(6/8)^{0,5} - 1 = 50{,}946$.

On peut également déterminer la *fonction de revenu compensé ou fonction de dépense*, qui dépend de P_X, de P_Y et de U. Dans l'hypothèse de la décomposition hicksienne de l'effet-prix, ce revenu compensé a déjà été noté $R^{(H)}$ et on peut écrire :

$R^{(H)} = P_X * x + P_Y * y = P_X [(U + 1)^{0,5} (P_Y / P_X)^{0,5} - 1] + P_Y [(U + 1)^{0,5} (P_X / P_Y)^{0,5} - 1]$

=> $R^{(H)} = 2 (U + 1)^{0,5} P_X^{0,5} P_Y^{0,5} - P_X - P_Y$

En appliquant cette relation aux valeurs de la période initiale, on retrouve la valeur $R^{(H)} = 817,13$.

On démontre par ailleurs (lemme de Shephard) que la dérivée de la fonction de revenu compensé par rapport au prix de l'un des biens est égale à la demande compensée de ce bien. On a ainsi la demande compensée de X lors de la variation de son prix de 12 à 8 : $dR / dP_X = (U + 1)^{0,5} P_X^{-0,5} P_Y^{0,5} -1 = 50,946$.

Enfin, c'est théoriquement la notion de demande compensée et non celle de demande non compensée qui doit être à la base du calcul du surplus du consommateur ainsi qu'à la base de la mesure de la variation de ce surplus au fur et à mesure que le prix change.
La mesure du surplus par la demande non compensée ne peut en effet n'être qu'une approximation parce qu'elle fait intervenir l'effet de revenu : le surplus est alors calculé par sommation des surplus apportés par les unités successivement demandées du bien mais exprimés avec une unité monétaire dont l'utilité marginale diminue progressivement à cause précisément de l'effet de revenu ; or, il convient de sommer des surplus exprimés en unités monétaires de valeur constante, ce que permet précisément de réaliser la demande compensée.
En ce qui concerne la variation du surplus lorsque le prix de l'un des biens change, elle correspond à la variation du revenu compensé (méthode de la variation compensatoire), que nous avons précédemment calculée : $R^{(H)} - R = - 182,86$: le consommateur accepte que son revenu soit diminué de 182,86 si le prix de X passe de 12 à 8.
La variation du surplus pourrait être également évaluée avec pour situation de référence non pas la période initiale mais la période terminale (méthode de la variation équivalente) : le raisonnement est alors à mener à partir de $R^{(H')}$ et de la différence $R^{(H')} - R^{(H)}$ pour prendre la notation utilisée plus loin lors de la présentation de l'indice réciproque du coût de la vie

3- Demande marshallienne versus demande hicksienne

Le calcul du consommateur revient toujours, en définitive, à déterminer un panier optimal.
Seulement, ce panier optimal peut être déterminé dans deux situations différentes :

DÉTERMINATION DU PANIER OPTIMAL	
1ère situation	*2ème situation*
Maximisation de la fonction d'utilité sous contrainte du niveau de revenu	Minimisation du revenu dépensé sous contrainte du niveau d'utilité
$L = U(x,y) + \lambda [R - x P_X + y P_Y]$	$L = x P_X + y P_Y + \lambda [U - U(x,y)]$
Quand on laisse prix et revenu sous forme de variables, on peut exprimer les fonctions de demande : $x = f (P_X ; P_Y ; R)$ $y = f (P_X ; P_Y ; R)$	Quand on laisse prix et utilité sous forme de variables, on peut exprimer les fonctions de demande : $x = f (P_X ; P_Y ; U)$ $y = f (P_X ; P_Y ; U)$
= demandes *marshalliennes* de x et y	= demandes *hicksiennes* de x et y

La fonction de demande définie au début correspond au type "marshallien", ce qui est le cas habituel.
En ce qui concerne la demande hicksienne, remarquons que la méthode utilisée pour l'exprimer est celle que nous avons employée pour déterminer la demande compensée ainsi que dans la décomposition hicksienne de l'effet-prix.
Remarques :

1- Considérant que les deux méthodes de détermination du panier optimal consistent à renverser les données du problème -la fonction objectif est dans un cas l'utilité à maximiser et dans l'autre la dépense à minimiser et la contrainte est dans un cas le budget et dans l'autre le niveau d'utilité-, le problème du choix du consommateur présente donc la propriété de dualité. Par conséquent, comme en programmation linéaire, on peut parler de *programme primal* pour la première méthode, celle qui aboutit aux fonctions de demandes marshalliennes, et de *programme dual* pour la deuxième méthode, celle qui aboutit aux fonctions de demande hicksiennes (l'analyse que propose Hicks dans son fameux ouvrage "Valeur et capital" publié en 1946 est reprise et généralisée par W. E. Diewert en 1982).

2- La demande hicksienne correspond à la version par définition hicksienne de la demande compensée présentée plus haut.

4- Demande marshallienne versus demande walrasienne.

La fonction de demande normale est elle-même parfois qualifiée de "*marshallienne*" ou de "*walrasienne*" : cette distinction peut être alors entendue de trois manières.

• Selon que la variable dépendante est le prix ou la quantité, la fonction de demande est dite :

- "marshallienne" : la courbe de demande décrit les différents prix maxima qui seraient acceptés pour différents niveaux de quantités, d'où l'explication de la présentation de la courbe avec les quantités en abscisse et les prix en ordonnée (la relation exprimant le prix en fonction de la quantité est dite "fonction de demande inverse") ;

- "walrasienne" : cela correspond au raisonnement dominant qui consiste à exprimer la quantité optimale demandée en fonction du prix ("fonction de demande directe") mais on garde malgré tout par habitude la représentation graphique due à Marshall.

• Selon que la demande est étudiée dans le cadre d'une analyse d'équilibre partiel (on ne tient pas compte des interdépendances entre marchés) ou dans celui d'une analyse d'équilibre général (on tient compte de ces interdépendances), la fonction de demande est :

- "marshallienne" : on se limite à la relation entre la quantité optimale demandée d'un bien et le prix de ce seul bien ;

- "walrasienne" : la demande individuelle du bien dépend du prix de tous les biens.

La fonction de demande "walrasienne" (analyse d'équilibre général) peut être elle-même brute ou nette :

La *demande brute* correspond à la demande totale exprimée par la fonction de demande issue du calcul d'optimisation ; elle indique donc la quantité que le consommateur souhaite consommer.

La *demande nette* est égale à la demande brute diminuée de la dotation initiale du consommateur dans le bien considéré ; elle indique donc la quantité que le consommateur souhaite acheter (ou vendre : la demande nette peut être négative et correspond alors à une offre). Soulignons par ailleurs que la fonction de demande nette est fonction des seuls prix des biens (criés par le commissaire-priseur) dans la mesure où le revenu du consommateur est lui-même fonction de ces prix ; le revenu est en effet égal à la valeur globale des biens de la dotation initiale du consommateur.

• Selon que l'on s'intéresse à la demande ordinaire ou à la demande visée par la loi de Walras, la fonction de demande est :

- "marshallienne" quand elle correspond à la demande brute, autrement dit la demande totale ;

- "walrasienne" quand on considère la demande nette globale pour un bien, c'est-à-dire la différence entre la demande et l'offre de l'ensemble des consommateurs pour ce bien, autrement dit l'agrégation des demandes nettes individuelles (définies dans le paragraphe précédent) qu'expriment tous les consommateurs pour ce bien.

Rappelons ici l'énoncé de la loi de Walras et son corollaire :

- énoncé : à l'équilibre concurrentiel, la somme en valeur des demandes nettes pour tous les marchés est nulle (on retrouve la loi de J.-B. Say) ;

- corollaire : lorsque tous les marchés sauf un sont en équilibre, le dernier l'est aussi (on retrouve le principe de l'analyse dichotomique et son postulat de neutralité de la monnaie).

DEUXIÈME PARTIE : LES INDICATEURS DE LA DEMANDE

§1) Les élasticités de la demande

L'élasticité est un indicateur de sensibilité : elle donne le sens et mesure l'intensité de la réaction d'une fonction à la variation de sa variable déterminante.

Si on a la fonction y = f(x), l'élasticité de y par rapport à x est :

$$\mathbf{e_{y/x} = (dy\ /\ y)\ /\ (dx\ /\ x) = (dy\ /\ dx) * (x\ /\ y)}$$

Remarque : La définition de l'élasticité que nous posons ici est celle de l'"élasticité-point" qui se différencie de l'élasticité d'arc que l'on calcule lorsque les variations ne sont pas infinitésimales.

L'élasticité est le rapport de deux variations relatives (celle de la fonction et celle de la variable) pour en faire un nombre indépendant des unités de mesure.
L'élasticité prend un signe positif ou négatif selon que y et x varient dans le même sens ou non, et sa valeur absolue est d'autant plus grande que la réaction de y à la variation de x est forte, l'élasticité unitaire servant de seuil entre demande rigide et demande élastique.

L'élasticité-prix de la demande prend deux formes selon que l'on envisage de tester la réaction de la demande d'un bien donné à la variation du prix de ce bien ou à celle du prix d'un autre bien : on parle d'élasticité-prix directe dans le premier cas et d'élasticité-prix croisée dans le second. Le signe des deux élasticités est important pour qualifier la nature des biens en cause : l'élasticité-prix directe est normalement négative et elle prend un signe positif en cas d'exception à la loi de la demande (effet Giffen, effet Veblen) ; l'élasticité-prix croisée est quant à elle positive, nulle ou négative selon que les deux biens sont substituables, indépendants ou complémentaires.

On peut ainsi écrire, dans le cas de notre application, avec nos notations précédentes et en nous limitant au cas de la demande de X :

Elasticité-prix directe de $X^{(D)}$ = $(dx\ /\ dP_X) * (P_X\ /\ x)$, avec $x = [P_Y + R - P_X]\ /\ 2P_X$, d'où le calcul d'une dérivée partielle de type u/v, qui, après simplification aboutit à l'expression suivante : $-\ (P_Y + R)\ /\ (P_Y + R - P_X)$
Pour les valeurs en période 0, $P_X = 12$, $P_Y = 6$ et $R = 1000$, on trouve dans notre application :
élasticité-prix directe de $X^{(D)} = -\ 1{,}0121$
Le signe négatif signifie que le bien X a une demande normale par rapport au prix.

La valeur absolue légèrement supérieure à 1 indique une demande plutôt élastique, ce que prouvent d'ailleurs les résultats obtenus précédemment quand le prix de X passe de 12 à 6.

Elasticité-prix croisée de $X^{(D)}$ $= (dx / dP_Y) * (P_Y / x)$
$= P_Y / (P_Y + R - P_X)$
$= + 0{,}006$ dans notre application.

Le signe positif signifie que X et Y sont substituables.
La valeur presque nulle nous indique une quasi-insensibilité de la demande de X à toute variation du prix de Y (ce que montrent d'ailleurs les résultats de la situation 2 de la période n par rapport à ceux de la situation 1 de cette même période, quand le prix de Y passe de 6 à 10).
Remarque : Il y a substituabilité brute du bien X au bien Y quand, lorsqu'il y a augmentation du prix de Y, la demande de X augmente par la domination de l'effet de substitution sur l'effet de revenu. Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir à la fois :

$dx / dP_X < 0$ et $dx / dP_Y > 0$ et également $dy / dP_Y < 0$ et $dy / dP_X > 0$

Autrement dit, il y a substituabilité brute lorsque les effets directs des variations de prix sont négatifs et que les effets croisés sont positifs.
Ces relations sont vérifiées dans l'application considérée : X et Y sont des substituts bruts.
Dans la théorie de l'équilibre général, pour que l'équilibre soit unique, les biens doivent être des substituts bruts. Autrement dit, il faut qu'ils ne soient pas fortement complémentaires ; ou encore, que les marchés ne soient pas trop interdépendants : sur le marché de X, l'influence d'une variation du prix de X doit être plus forte que l'influence que les prix de tous les autres biens peuvent avoir sur ce marché.

Elasticité-revenu de $X^{(D)}$ $= (dx / dR) * (R / x)$
$= R / (P_Y + R - P_X)$
$= + 1{,}006$ dans notre application.

Le signe positif signifie que le bien X est "normal" en ce sens que sa demande est une fonction croissante du revenu du consommateur.
La valeur absolue voisine de 1 nous indique que la demande évolue grosso modo proportionnellement au revenu nominal du consommateur.

Remarques terminales sur l'élasticité :

1- Élasticité et dérivée logarithmique.
L'élasticité en un point d'une fonction dérivable peut être exprimée à partir de la dérivée logarithmique :

$$\begin{aligned} e(y/x) &= (dy / dx) * (x / y) \\ &= y' * (x / y) \\ &= (y' / y) * x \\ &= [d(\ln y) / dx] * x \end{aligned}$$

2- Élasticité et équation de Slutsky.
Reprenons par exemple l'équation de Slutsky appliquée à l'analyse hicksienne pour le bien X :

$$\Delta x^{(D)} / \Delta P_X = [\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{U\ constante} - (\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)}$$

Si on multiplie les deux membres de cette égalité par le rapport (P_X / x) et le dernier terme du membre de droite en plus par (R/R), on obtient :

$$\begin{aligned} &(\Delta x^{(D)} / \Delta P_X) * (P_X / x) \\ &= [\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{U\ constante} * (P_X / x) - [(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * x^{(0)} * (P_X / x) * (R/R)] \\ &= [\Delta x^{(Ds)} / \Delta P_X]_{U\ constante} * (P_X / x) - [(\Delta x^{(DR)} / \Delta R) * R / x * P_X\, x / R] \end{aligned}$$

Donc :
élasticité-prix directe de la demande (marshallienne)
= élasticité-prix de la demande compensée - élasticité-revenu * part du revenu consacrée à la dépense en X.

3- Lois d'Engel et typologie des biens selon la valeur de l'élasticité-revenu de leur demande.

Les lois d'Engel concernent l'évolution des principaux postes de dépense des ménages quand augmente leur revenu : par rapport au revenu, les dépenses de consommation alimentaire, celles liées à l'habillement et au logement et celles enfin consacrées à l'hygiène, à la santé, à l'éducation et aux loisirs, ont tendance à progresser respectivement moins que proportionnellement, proportionnellement et plus que proportionnellement.
Cela amène à dresser une classification des biens selon la valeur de leur élasticité-revenu :

0 +1

- <--> +

Biens inférieurs de Giffen

Biens inférieurs (non Giffen)

Biens supérieurs

Biens neutres

B i e n s a n o r m a u x

B i e n s n o r m a u x

D'après les lois d'Engel, les biens alimentaires sont des biens inférieurs, certains étant de type Giffen quand ils sont de première nécessité, les biens concernant l'habillement et l'habitation des biens neutres et la santé, l'éducation, les loisirs des biens supérieurs.

§2) Les indices de prix.

A- Les indices du coût de la vie.

1- L'indice "vrai" du coût de la vie.

On part de $E^{(0)}$ sur $U^{(0)}$.

On appelle indice "vrai" du coût de la vie l'indice noté V et calculé à partir du rapport entre le revenu dont il faudrait que le consommateur dispose pour rester sur $U^{(0)}$ en période (n), donc avec le nouveau vecteur de prix $P_i^{(n)}$, c'est-à-dire le revenu $R^{(H)}$, et le revenu nominal effectif R :

$$\mathbf{V = [R^{(H)} / R] * 100}$$

$V > 100 \Rightarrow R^{(H)} > R$ => il y a augmentation du coût de la vie entre (0) et (n) ;
$V < 100 \Rightarrow R^{(H)} < R$ => il y a augmentation du pouvoir d'achat entre (0) et (n).

Dans l'application, on a :

Situation 1 V = (817,1358 / 1000) ∗ 100 = 81,71 => le pouvoir d'achat s'est amélioré.

Situation 2 V = (1054,992 / 1000) ∗ 100 = 105,49 => le coût de la vie s'est accru.

N.B. : Egalité du rapport des utilités marginales avec celui des prix, autrement dit égalité des deux pentes => $- 3597{,}8486 / (1+x)^2 = - 8/10 = - 4/5 = - 0{,}8$

=> x = 66,062 (comme précédemment, notons cette valeur $x^{(H)}$)
=> y = (3596,8486 - 66,062)/67,062 = 52,6496 (notons cette valeur $y^{(H)}$)
=> $R^{(H)}$ = (66,062 * 8) + (52,6496 * 10) = 1054,992

2- L'indice réciproque du coût de la vie.

On part de $E^{(n)}$ sur $U^{(n)}$.

On appelle indice réciproque du coût de la vie l'indice noté W et calculé à partir du rapport entre le revenu nominal effectif R et le revenu qu'il aurait fallu au consommateur pour être sur $U^{(n)}$ avec le vecteur de prix initial $P_i^{(0)}$; appelons $R^{(H')}$ ce revenu. Par conséquent,

$$\mathbf{W = [R / R^{(H')}] * 100}$$

Dans l'application, on a :

Situation 1 W = (1000 / 1223,8914) ∗ 100 = 81,71

N.B. : Egalité du rapport des utilités marginales avec celui des prix, autrement dit égalité des deux pentes => $- 5355{,}1875 / (1+x)^2 = - 12/6 = - 2$
=> x = 50,7455 (notons cette valeur $x^{(H')}$)
=> y = 102,4909 (notons cette valeur $y^{(H')}$)
=> $R^{(H')}$ = (50,7455 * 12) + (102,4909 * 6) = 1223,8914

Situation 2 W = (1000 / 948,0504) ∗ 100 = 105,48

N.B. : Egalité du rapport des utilités marginales avec celui des prix, autrement dit égalité des deux pentes => $- 3238{,}5125 / (1+x)^2 = - 12/6 = - 2$
=> x = 40,24 ($x^{(H')}$)
=> y = 77,5284 ($y^{(H')}$)
=> $R^{(H')}$ = (40,24 ∗ 12) + (77,5284 ∗ 6) = 948,0504

Remarque : Que l'on parte de $E^{(0)}$ ou de $E^{(n)}$, on trouve tout logiquement les mêmes valeurs d'indices de coût de la vie.

B- Les indices synthétiques de Laspeyres et de Paasche.

	Période 0		**Période n**			
			Situation 1		*Situation 2*	
	Q	**P**	**Q**	**P**	**Q**	**P**
BIEN X	41,4167	12	62,375	8	62,625	8
BIEN Y	83,8333	6	83,50	6	49,90	10

1- L'indice de prix de Laspeyres

L'indice de prix de Laspeyres (L_P) est la moyenne arithmétique, pondérée par les valeurs globales de la période de base, des indices élémentaires de prix :

$$L_P = 100 * [\sum P_i^0 Q_i^0 * (P_i^n / P_i^0)] / \sum P_i^0 Q_i^0$$

$$\mathbf{L_P = 100 * \sum P_i^n Q_i^0 / \sum P_i^0 Q_i^0}$$

Application, situation 1 :

$L_P = 100 * [(8 * 41{,}4167) + (6 * 83{,}8333)] / [(12 * 41{,}4167) + (6 * 83{,}8333)]$
$= 100 * 834{,}3334 / 1000 \Rightarrow L_P = 83{,}4333$

Application, situation 2 :

$L_P = 100 * [(8 * 41{,}4167) + (10 * 83{,}8333)] / [(12 * 41{,}4167) + (6 * 83{,}8333)]$
$= 100 * 1169{,}9666 / 1000 \Rightarrow L_P = 116{,}9667$

L'indice de Laspeyres adopte la consommation de la période (0) comme consommation de préférence : si on le compare alors avec l'indice vrai du coût de la vie qui est calculé à partir de la même base, on constate qu'il lui est supérieur.

On peut écrire avec nos notations de départ :

$L_P = 100 * [P_X^{(n)} x^{(0)} + P_Y^{(n)} y^{(0)}] / [P_X^{(0)} x^{(0)} + P_Y^{(0)} y^{(0)}]$

$V = 100 * [R^{(H)} / R] = 100 * [P_X^{(n)} x^{(H)} + P_Y^{(n)} y^{(H)}] / [P_X^{(0)} x^{(0)} + P_Y^{(0)} y^{(0)}]$

L_P et V ont le même dénominateur mais un numérateur différent : le numérateur de L_P correspond au revenu nécessaire à l'achat du panier $[x^{(0)} ; y^{(0)}]$ procurant l'utilité $U^{(0)}$ avec le vecteur de prix de la période (n), tandis que le numérateur de V est le revenu minimal qu'il suffit d'avoir pour obtenir aux mêmes conditions de prix la même utilité $U^{(0)}$ puisque les quantités $x^{(H)}$ et $y^{(H)}$ sont optimales. Il ne peut y avoir, pour un certain vecteur de prix, deux points d'équilibre sur la même courbe d'indifférence : avec $P_i^{(n)}$, il n'y a que $E^{(H)}$. Le numérateur de V est donc toujours inférieur à celui de L_P.

Conclusion : L'indice de prix de Laspeyres est toujours supérieur à l'indice vrai du coût de la vie.

Remarque : Notre illustration aboutit d'ailleurs à un résultat contradictoire : alors que l'indice vrai du coût de la vie indique un gain de pouvoir d'achat, l'indice de Laspeyres fait au contraire état d'une augmentation du coût de la vie.

2- L'indice de prix de Paasche

L'indice de prix de Paasche (P_P) est la moyenne harmonique, pondérée par les valeurs globales de la période courante, des indices élémentaires de prix :

$$P_P = 100 * \sum P_i^n Q_i^n / [\sum P_i^n Q_i^n * (P_i^0 / P_i^n)]$$

$$\mathbf{P_P = 100 * \sum P_i^n Q_i^n / P_i^0 Q_i^n}$$

Application, situation 1 :

$P_P = 100 * [(8 * 62{,}375) + (6 * 83{,}50)] / [(12 * 62{,}375) + (6 * 83{,}50)]$

$= 100 * 1000 / 1249{,}50 \Rightarrow P_P = 80{,}032$

Application, situation 2 :

$P_P = 100 * [(8 * 62{,}625) + (10 * 49{,}90)] / [(12 * 62{,}625) + (6 * 49{,}90)]$

$= 100 * 1000 / 1050{,}90 \Rightarrow P_P = 95{,}1565$

L'indice de prix de Paasche adopte la consommation de la période (n) comme consommation de référence : si on le compare alors à l'indice réciproque du coût de la vie qui est calculé sur la même base, on constate qu'il lui est inférieur.

On peut écrire avec nos notations de départ :

$P_P = 100 * [P_X^{(n)} x^{(n)} + P_Y^{(n)} y^{(n)}] / [P_X^{(0)} x^{(n)} + P_Y^{(0)} y^{(n)}]$

$W = 100 * [R / R^{(H')}] = 100 * [P_X^{(n)} x^{(n)} + P_Y^{(n)} y^{(n)}] / [P_X^{(0)} x^{(H')} + P_Y^{(0)} y^{(H')}]$

P_P et W ont le même numérateur mais un dénominateur différent : le dénominateur de P_P correspond au revenu nécessaire à l'achat du panier $[x^{(n)} ; y^{(n)}]$ procurant l'utilité $U^{(n)}$ avec le vecteur de prix de la période (n), tandis que le dénominateur de W est le revenu *minimal* qu'il suffit pour obtenir aux mêmes conditions de prix la même utilité $U^{(n)}$ puisque les quantités $x^{(H')}$ et $y^{(H')}$ sont optimales. Il ne peut y avoir, pour un certain vecteur de prix, deux points d'équilibre sur la même courbe d'indifférence. Le dénominateur de W est donc toujours inférieur à celui de P_P.

Conclusion : L'indice de prix de Paasche est toujours inférieur à l'indice réciproque du coût de la vie.

Remarque : On définit l'indice de Fisher comme étant égal à la moyenne géométrique des deux indices de Laspeyres et de Paasche : $F = \sqrt{(L*P)}$

Quand les coefficients de la fonction d'utilité sont égaux, on démontre que l'indice de Fisher est égal aux indices vrai et réciproque du coût de la vie.

On vérifie cette propriété dans l'application :

- situation 1 : $F_P = \sqrt{(83{,}4333 * 80{,}032)} = 81{,}715 = V = W$;
- situation 2 : $F_P = \sqrt{(116{,}9667 * 95{,}1565)} = 105{,}4995 = V = W$.

